

**XXXIII**

**Межрегиональная олимпиада  
школьников им. И.Я. Верченко  
по математике и криптографии**

**УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ**



**Москва 2024**

<b>ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП</b> .....	2
<b>9 КЛАСС</b> .....	2
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ .....	2
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	4
<b>10 КЛАСС</b> .....	5
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ .....	5
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	6
<b>11 КЛАСС</b> .....	8
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ .....	8
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	9
<b>ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП</b> .....	12
9 КЛАСС .....	12
10 КЛАСС .....	13
11 КЛАСС .....	14
ОТВЕТЫ.....	16

Приводимые задания предлагались в трех возрастных категориях (9, 10, 11 классы) по два равноценных по сложности варианта в 9 и 10 классах и по два равноценных по сложности варианта в каждом из трех групп часовых поясов (ЗАПАД, СИБИРЬ, ВОСТОК) для участников 11 класса. Тематика отдельных задач в разных классах пересекается, при этом младшим классам предлагались более легкие варианты заданий.

## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

### 9 КЛАСС

#### УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Найдите пять простых чисел, образующих арифметическую прогрессию с разностью 12. Ответ обоснуйте.
2. Катя и Юра играют в следующую игру. Имеется пустая таблица из одной строки, состоящая из  $k = 100$  пустых ячеек:  $(a_1, \dots, a_k)$ , которые игроки заполняют числами от 0 до 6. Первым ходит Юра, который выбирает число  $t$  такое, что  $1 \leq t \leq 99$  и заполняет  $t$  ячеек.

XXXII Межрегиональная олимпиада школьников им. И.Я. Верченко по математике и криптографии  
 Второй ходит Катя, которая заполняет оставшиеся ячейки. Победитель определяется по следующему правилу: если в результате получается «счастливая» комбинация чисел – полностью заполненная таблица, в которой числа можно разбить на две непересекающиеся группы, суммы чисел в которых одинаковы, то выигрывает Катя, в противном случае выигрывает Юра. Например, комбинация (1,5,3,4,6) не является «счастливой», так как в ней присутствует нечетное число нечетных чисел. С другой стороны, комбинация (6,5,3,6,4) является «счастливой», так как  $6 + 6 = 5 + 3 + 4$ . У кого из игроков имеется выигрышная стратегия? Ответ обоснуйте.

3. а) перестановка  $f$  чисел  $\{0, 1, \dots, 6\}$  задана таблицей:  
 Например,  $f(2) = 0$ . Найдите две перестановки  $g$  и  $h$  такие, что для всех  $x \in \{0, 1, \dots, 6\}$  выполняется

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	0	4	6	5	1

$$f(x) = (g(x) + h(x)) \pmod{7}.$$

- б) перестановка  $f$  задана на чётном количестве чисел  $\{0, 1, \dots, 2n - 1\}$  таблицей:

$x$	0	1	2	..	$2n - 2$	$2n - 1$
$f(x)$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	..	$i_{2n-2}$	$i_{2n-1}$

Здесь  $(i_0, i_1, \dots, i_{2n-1})$  – перестановка чисел  $\{0, 1, \dots, 2n - 1\}$ .

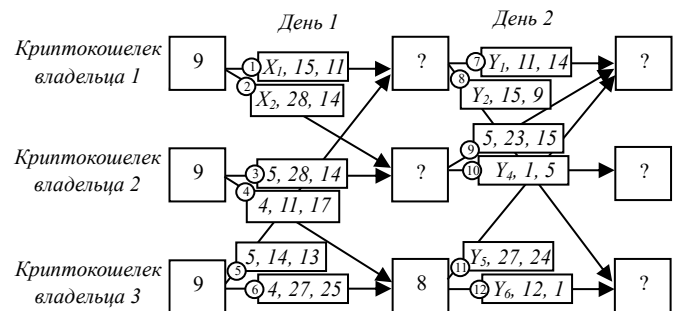
Докажите, что не существует перестановок  $g$  и  $h$  таких, что для всех  $x \in \{0, 1, \dots, 2n - 1\}$  выполняется  $f(x) = (g(x) + h(x)) \pmod{2n}$ .

4. В криптосистеме RSA (знания алгоритма шифрования не требуется для решения задачи) элементы надёжности определяются несколькими параметрами. В частности, выбором числа  $N = p \cdot q$ , где  $p, q$  – различные нечётные простые числа, и значением  $\varphi(N) = (p - 1) \cdot (q - 1)$ . Известна следующая теорема (малая теорема Ферма): если  $p$  – простое число,  $a$  – целое число, не делящееся на  $p$ , то  $a^{p-1} = 1 \pmod{p}$ . Используя это:

а) докажите, что  $x^{\frac{\varphi(N)+1}{2}} = x \pmod{N}$  для всех  $x \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$ .

б) найдите  $p$  и  $q$ , если известно, что  $N = 44814101$  и  $x^{22400353} = x \pmod{N}$  для всех  $x \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$ .

5. Каждый из трех владельцев криптокошельков имеет на своем счету по 9 криптокойнов. Каждый из двух дней ими совершаются по две транзакции: по переводу части криптокойнов со своего криптокошелька на криптокошелек другого владельца и по возврату оставшихся криптокойнов обратно на свой кошелек. У каждого имеется свой секретный ключ  $S \in \{1, 2, \dots, 28\}$ . При совершении транзакции указываются три числа  $(X, a, b)$ , где  $X$  - число переводимых криптокойнов,  $(a, b)$  - электронная подпись перевода. Электронная подпись находится по правилу: выбираем произвольное  $k \in \{1, 2, \dots, 28\}$ , затем находим  $a = r_{29}(2^k)$ ,  $b = r_{28}(Xa + Sk)$ , где  $r_N(M)$  – остаток от деления числа  $M$  на  $N$ .



На рисунке указаны совершенные транзакции (пронумерованы числами в кружках) за два дня. Сколько будет криптокойнов у каждого владельца криптокошелька по окончании двух дней?

6. Вася хочет заполнить квадратную таблицу (криптографическую мозаику) размера  $4 \times 4$  целыми числами от 0 до 16 по следующему правилу. Сначала он выбирает четыре целых числа  $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \{0, 1, \dots, 16\}$ . Затем первую строку Вася заполняет числами  $a_i^{(1)} = (b_i + 1) \pmod{17}, i = 1, 2, 3, 4$ , вторую строку – числами  $a_i^{(2)} = (b_i + 4) \pmod{17}, i = 1, 2, 3, 4$ ,

XXXII Межрегиональная олимпиада школьников им. И.Я. Верченко по математике и криптографии третью  $a_i^{(3)} = (b_i + 13)(\text{mod } 17), i = 1, 2, 3, 4$  и, аналогично, четвертую  $a_i^{(4)} = (b_i + 16)(\text{mod } 17), i = 1, 2, 3, 4$ . При этом числа  $b_1, b_2, b_3, b_4$  Вася выбрать должен так, чтобы все числа в таблице оказались различными и не было числа 8. Сумеет ли Вася это сделать? Если да, то чему равны  $b_1, b_2, b_3, b_4$

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### Задача 1

**ОТВЕТ:** 5,17,29,41,53.

### Задача 2

Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда игрок, делающий первый ход, заполняет максимально возможное число ячеек, равное  $k - 1$ . Расположим эти  $k - 1$  число в порядке не убывания:  $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_{k-1}}$ .

Здесь в индексах указаны номера позиций, на которых стоят эти числа в таблице. Образует два множества позиций, которые заполнены:  $\{i_1, i_3, \dots\}$  и  $\{i_2, i_4, \dots\}$ , беря указанные числа через одно. Тогда суммы чисел на этих позициях могут отличаться друг от друга не более, чем на 6. Поэтому оставшуюся незаполненной позицию можно заполнить числом от 0 до 6 так, чтобы получилась «счастливая» комбинация

**ОТВЕТ:** Если первым ходит Юра, то Катя всегда может выиграть.

### Задача 3

а) Так как  $\text{НОД}(2,7)=\text{НОД}(6,7)=1$ , то  $g(x) = 2f(x)(\text{mod } 7)$  и  $h(x) = 6f(x)(\text{mod } 7)$  являются перестановками. Но тогда, например,  $g(x) = 2f(x)$ ,  $h(x) = 6f(x)$  и выполняется  $g(x) + h(x) = 2f(x) + 6f(x) = f(x)(\text{mod } 7)$ .

б)  $\sum_{i=0}^{2n-1} f(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} x = (2n + 1)n = n(\text{mod } (2n))$ .

С другой стороны, если указанное условия пункта б) представление существует, то

$$\sum_{i=0}^{2n-1} f(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} g(x) + \sum_{i=0}^{2n-1} h(x) = 2(2n + 1)n = 0(\text{mod } (2n)).$$

Что доказывает невозможность указанного представления.

### Задача 4

а) из условия задачи и равенства  $a^{p-1} = 1(\text{mod } p)$  следует  $a^{k(p-1)+1} = a(\text{mod } p)$  для любого натурального  $k$ . Тогда при  $k = \frac{q-1}{2}$  получим  $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(\text{mod } p)$ .

Аналогично  $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(\text{mod } q)$ . Так как  $p, q$  – простые числа, то из этих полученных выше равенств следует  $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(\text{mod } N)$ . Пункт а) доказан.

б) предположим, что  $\frac{\varphi(N)}{2} + 1 = 22400353$ . Тогда получим систему уравнений  $p \cdot q = 44814101$ ,  $(p - 1) \cdot (q - 1) = 44800704$ .

Решая полученную систему, находим  $p = 6949, q = 6449$ .

**ОТВЕТ:**  $p = 6949, q = 6449$ .

### Задача 5

Сначала по рисунку выпишем очевидные соотношения:

$$X_1 + X_2 = 9 \quad (1)$$

$$Y_1 + Y_2 = X_1 + 5 \quad (2)$$

$$5 + Y_4 = X_2 + 5 \quad (3)$$

$$Y_5 + Y_6 = 8 \quad (4)$$

Необходимо найти:  $\Sigma_1 = Y_1 + 5 + Y_5$ ,  $\Sigma_2 = Y_4$ ,  $\Sigma_3 = Y_2 + Y_6$ .

Далее, заметим, что транзакции №1 и №8 осуществлены одним и тем же владельцем – владельцем 1. То есть использовался один и тот же секретный ключ  $S_1$ , при этом использовалось одно и то же значение  $k$  в подписи, поэтому:

$$11 = (15X_1 + S_1k)(\text{mod } 28),$$

$$9 = (15Y_2 + S_1k)(\text{mod } 28).$$

$$\text{Отсюда получим: } 2 = 30 = (15(X_1 - Y_2))(\text{mod } 28).$$

$$\text{Следовательно, } X_1 - Y_2 = 2.$$

$$\text{С учетом (2) имеем: } Y_1 = X_1 - Y_2 + 5 = 7.$$

Аналогичное свойство замечаем у транзакций №6 и №11:

$$25 = (27 \cdot 4 + S_3k)(\text{mod } 28),$$

$$24 = (27Y_5 + S_3k)(\text{mod } 28).$$

Отсюда получим:  $1 = -27 = (27(4 - Y_5))(\text{mod } 28)$ . Следовательно,  $Y_5 = 5$  и уже находится  $\Sigma_1 = 7 + 5 + 5 = 17$ .

Теперь обратим внимание на транзакцию №10, у которой  $a = 1 = 2^0(\text{mod } 29)$ , т.е.  $k = 0(\text{mod } 28) = 28$ . Значит  $5 = (Y_4 + S_2 \cdot 28)(\text{mod } 28) = Y_4$  и  $\Sigma_2 = 5$ .

Т.к. исходная сумма криптокойнов была равна 27, то  $\Sigma_3 = 27 - \Sigma_1 - \Sigma_2 = 5$ .

**ОТВЕТ:** (17,5,5).

### Задача 6

Задачу можно решить древовидным перебором всех вариантов. Существование подобных мозаик для других простых чисел является открытой проблемой. Гипотеза утверждает, что такие мозаики существуют только для простых чисел Ферма: 3,5,17,257.

**ОТВЕТ:** 0,6,10,16.

## 10 КЛАСС

### УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Найдите пять простых чисел, образующих арифметическую прогрессию с разностью 12. Ответ обоснуйте.
2. Катя и Юра играют в следующую игру. Имеется пустая таблица из одной строки, состоящая из  $k = 100$  пустых ячеек:  $(a_1, \dots, a_k)$ , которые игроки заполняют числами от 0 до 6. Первым ходит Юра, который выбирает число  $t$  такое, что  $1 \leq t \leq 99$  и заполняет  $t$  ячеек. Второй ходит Катя, которая заполняет оставшиеся ячейки. Победитель определяется по следующему правилу: если в результате получается «счастливая» комбинация чисел – полностью заполненная таблица, в которой числа можно разбить на две непересекающиеся группы, суммы чисел в которых одинаковы, то выигрывает Катя, в противном случае выигрывает Юра. Например, комбинация (1,5,3,4,6) не является «счастливой», так как в ней присутствует нечетное число нечетных чисел. С другой стороны, комбинация (6,5,3,6,4) является «счастливой», так как  $6 + 6 = 5 + 3 + 4$ . У кого из игроков имеется выигрышная стратегия? Ответ обоснуйте.
3. а) перестановка  $f$  чисел  $\{0,1, \dots, 6\}$  задана таблицей:  
Например,  $f(2) = 0$ . Найдите две перестановки  $g$  и  $h$  такие, что для всех  $x \in \{0,1, \dots, 6\}$  выполняется  
выполняется  
 $f(x) = (g(x) + h(x))(\text{mod } 7)$ .

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	0	4	6	5	1

b) перестановка  $f$  задана на чётном количестве чисел  $\{0, 1, \dots, 2n - 1\}$  таблицей:

$x$	0	1	2	...	$2n - 2$	$2n - 1$
$f(x)$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	...	$i_{2n-2}$	$i_{2n-1}$

Здесь  $(i_0, i_1, \dots, i_{2n-1})$  – перестановка чисел  $\{0, 1, \dots, 2n - 1\}$ .

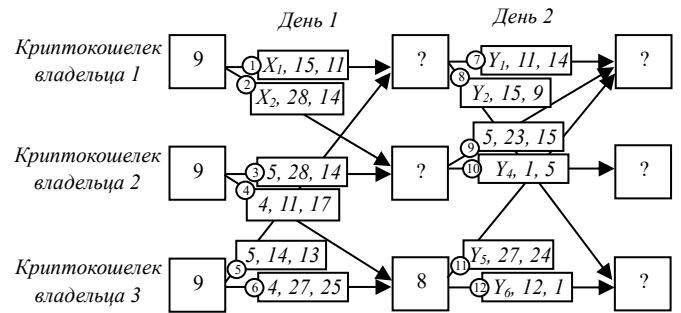
Докажите, что не существует перестановок  $g$  и  $h$  таких, что для всех  $x \in \{0, 1, \dots, 2n - 1\}$  выполняется  $f(x) = (g(x) + h(x)) \pmod{2n}$ .

4. В криптосистеме RSA (знания алгоритма шифрования не требуется для решения задачи) элементы надёжности определяются несколькими параметрами. В частности, выбором числа  $N = p \cdot q$ , где  $p, q$  – различные нечётные простые числа, и значением  $\varphi(N) = (p - 1) \cdot (q - 1)$ . Известна следующая теорема (малая теорема Ферма): если  $p$  – простое число,  $a$  – целое число, не делящееся на  $p$ , то  $a^{p-1} = 1 \pmod{p}$ . Используя это:

c) докажите, что  $x^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = x \pmod{N}$  для всех  $x \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$ .

d) найдите  $p$  и  $q$ , если известно, что  $N = 44814101$  и  $x^{22400353} = x \pmod{N}$  для всех  $x \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$ .

6. Каждый из трех владельцев криптокошельков имеет на своем счету по 9 криптокойнов. Каждый из двух дней ими совершаются по две транзакции: по переводу части криптокойнов со своего криптокошелька на криптокошелек другого владельца и по возврату оставшихся криптокойнов обратно на свой кошелек. У каждого имеется свой секретный ключ  $S \in \{1, 2, \dots, 28\}$ . При совершении транзакции указываются три числа  $(X, a, b)$ , где  $X$  – число переводимых криптокойнов,  $(a, b)$  – электронная подпись перевода. Электронная подпись находится по правилу: выбираем произвольное  $k \in \{1, 2, \dots, 28\}$ , затем находим  $a = r_{29}(2^k)$ ,  $b = r_{28}(Xa + Sk)$ , где  $r_N(M)$  – остаток от деления числа  $M$  на  $N$ .



На рисунке указаны совершенные транзакции (пронумерованы числами в кружках) за два дня. Сколько будет криптокойнов у каждого владельца криптокошелька по окончании двух дней?

7. Вася хочет заполнить квадратную таблицу (криптографическую мозаику) размера  $4 \times 4$  целыми числами от 0 до 16 по следующему правилу. Сначала он выбирает четыре целых числа  $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \{0, 1, \dots, 16\}$ . Затем первую строку Вася заполняет числами  $a_i^{(1)} = (b_i + 1) \pmod{17}, i = 1, 2, 3, 4$ , вторую строку – числами  $a_i^{(2)} = (b_i + 4) \pmod{17}, i = 1, 2, 3, 4$ , третью  $a_i^{(3)} = (b_i + 13) \pmod{17}, i = 1, 2, 3, 4$  и, аналогично, четвертую  $a_i^{(4)} = (b_i + 16) \pmod{17}, i = 1, 2, 3, 4$ . При этом числа  $b_1, b_2, b_3, b_4$  Вася выбрать должен так, чтобы все числа в таблице оказались различными и не было числа 8. Сумеет ли Вася это сделать? Если да, то чему равны  $b_1, b_2, b_3, b_4$

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### Задача 1

**ОТВЕТ:** 5, 17, 29, 41, 53.

### Задача 2

Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда игрок, делающий первый ход, заполняет максимально возможное число ячеек, равное  $k - 1$ . Расположим эти  $k - 1$  число в порядке не убывания:  $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_{k-1}}$ .

**XXXII Межрегиональная олимпиада школьников им. И.Я. Верченко по математике и криптографии**  
 Здесь в индексах указаны номера позиций, на которых стоят эти числа в таблице. Образует два множества позиций, которые заполнены:  $\{i_1, i_3, \dots\}$  и  $\{i_2, i_4, \dots\}$ , беря указанные числа через одно. Тогда суммы чисел на этих позициях могут отличаться друг от друга не более, чем на 6. Поэтому оставшуюся незаполненной позицию можно заполнить числом от 0 до 6 так, чтобы получилась «счастливая» комбинация

**ОТВЕТ:** Если первым ходит Юра, то Катя всегда может выиграть.

### Задача 3

а) Так как  $\text{НОД}(2,7)=\text{НОД}(6,7)=1$ , то  $g(x) = 2f(x)(\text{mod } 7)$  и  $h(x) = 6f(x)(\text{mod } 7)$  являются перестановками. Но тогда, например,  $g(x) = 2f(x)$ ,  $h(x) = 6f(x)$  и выполняется

$$g(x) + h(x) = 2f(x) + 6f(x) = f(x)(\text{mod } 7).$$

б)  $\sum_{i=0}^{2n-1} f(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} x = (2n + 1)n = n(\text{mod } (2n)).$

С другой стороны, если указанное условию пункта б) представление существует, то

$$\sum_{i=0}^{2n-1} f(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} g(x) + \sum_{i=0}^{2n-1} h(x) = 2(2n + 1)n = 0(\text{mod } (2n)).$$

Что доказывает невозможность указанного представления.

### Задача 4

а) из условия задачи и равенства  $a^{p-1} = 1(\text{mod } p)$  следует  $a^{k(p-1)+1} = a(\text{mod } p)$  для любого натурального  $k$ . Тогда при  $k = \frac{q-1}{2}$  получим  $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(\text{mod } p)$ .

Аналогично  $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(\text{mod } q)$ . Так как  $p, q$  – простые числа, то из этих полученных выше равенств следует  $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(\text{mod } N)$ . Пункт а) доказан.

с) предположим, что  $\frac{\varphi(N)}{2} + 1 = 22400353$ . Тогда получим систему уравнений  $p \cdot q = 44814101$ ,  $(p - 1) \cdot (q - 1) = 44800704$ .

Решая полученную систему, находим  $p = 6949, q = 6449$ .

**ОТВЕТ:**  $p = 6949, q = 6449$ .

### Задача 5

Сначала по рисунку выпишем очевидные соотношения:

$$X_1 + X_2 = 9 \quad (1)$$

$$Y_1 + Y_2 = X_1 + 5 \quad (2)$$

$$5 + Y_4 = X_2 + 5 \quad (3)$$

$$Y_5 + Y_6 = 8 \quad (4)$$

Необходимо найти:  $\Sigma_1 = Y_1 + 5 + Y_5, \Sigma_2 = Y_4, \Sigma_3 = Y_2 + Y_6$ .

Далее, заметим, что транзакции №1 и №8 осуществлены одним и тем же владельцем – владельцем 1. То есть использовался один и тот же секретный ключ  $S_1$ , при этом использовалось одно и то же значение  $k$  в подписи, поэтому:

$$11 = (15X_1 + S_1k)(\text{mod } 28),$$

$$9 = (15Y_2 + S_1k)(\text{mod } 28).$$

Отсюда получим:  $2 = 30 = (15(X_1 - Y_2))(\text{mod } 28)$ .

Следовательно,  $X_1 - Y_2 = 2$ .

С учетом (2) имеем:  $Y_1 = X_1 - Y_2 + 5 = 7$ .

Аналогичное свойство замечаем у транзакций №6 и №11:

$$25 = (27 \cdot 4 + S_3k)(\text{mod } 28),$$

$$24 = (27Y_5 + S_3k)(\text{mod } 28).$$

Отсюда получим:  $1 = -27 = (27(4 - Y_5))(\text{mod } 28)$ . Следовательно,  $Y_5 = 5$  и уже находится  $\Sigma_1 = 7 + 5 + 5 = 17$ .

XXXII Межрегиональная олимпиада школьников им. И.Я. Верченко по математике и криптографии  
 Теперь обратим внимание на транзакцию №10, у которой  $a = 1 = 2^0 \pmod{29}$ , т.е.  $k = 0 \pmod{28} = 28$ . Значит  $5 = (Y_4 + S_2 \cdot 28) \pmod{28} = Y_4$  и  $\Sigma_2 = 5$ .

Т.к. исходная сумма криптокойнов была равна 27, то  $\Sigma_3 = 27 - \Sigma_1 - \Sigma_2 = 5$ .

**ОТВЕТ:** (17,5,5).

### Задача 6

Задачу можно решить древовидным перебором всех вариантов. Существование подобных мозаик для других простых чисел является открытой проблемой. Гипотеза утверждает, что такие мозаики существуют только для простых чисел Ферма: 3,5,17,257.

**ОТВЕТ:** 0,6,10,16.

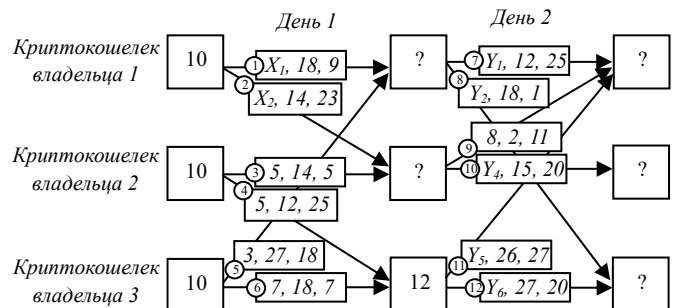
## 11 КЛАСС

### УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Катя и Юра играют в следующую игру. Имеется пустая таблица из одной строки, состоящая из  $k = 2023^2$  пустых ячеек:  $(a_1, \dots, a_k)$ , которые игроки заполняют числами от 0 до 2022. Первым ходит Юра, который выбирает число  $t$  такое, что  $1 \leq t \leq k - 1$  и заполняет  $t$  ячеек. Второй ходит Катя, которая заполняет оставшиеся ячейки. Победитель определяется по следующему правилу: если в результате получается «счастливая» комбинация чисел – полностью заполненная таблица, в которой числа можно разбить на две непересекающиеся группы, суммы чисел в которых одинаковы, то выигрывает Катя, в противном случае выигрывает Юра. Например, комбинация (7,5,3,4,6) не является «счастливой», так как в ней присутствует нечетное число нечетных чисел. С другой стороны, комбинация (4,5,1,6,8) является «счастливой», так как  $4 + 8 = 5 + 1 + 6$ . У кого из игроков имеется выигрышная стратегия? Ответ обосновать.

2. Каждый из трех владельцев криптокошельков имеет на своем счету по 10 криптокойнов. Каждый из двух дней ими совершаются по две транзакции: по переводу части криптокойнов со своего криптокошелька на криптокошелек другого владельца и по возврату оставшихся криптокойнов обратно на свой кошелек. У каждого имеется свой секретный ключ  $S \in \{1, 2, \dots, 28\}$ . При совершении транзакции указываются три числа  $(X, a, b)$ , где  $X$  - число переводимых криптокойнов,  $(a, b)$  - электронная подпись перевода. Электронная подпись находится по правилу: выбираем произвольное  $k \in \{1, 2, \dots, 28\}$ , затем находим

$a = r_{29}(2^k)$ ,  $b = r_{28}(Xa + Sk)$ , где  $r_N(M)$  – остаток от деления числа  $M$  на  $N$ . На рисунке указаны совершенные транзакции (пронумерованы числами в кружках) за два дня. Сколько будет криптокойнов у каждого владельца криптокошелька по окончании двух дней?



3. а) перестановка  $f$  чисел  $\{0, 1, \dots, 6\}$  задана таблицей:  
 Например,  $f(2) = 4$ . Найдите две различные перестановки  $g$  и  $h$  такие, что для всех  $x \in \{0, 1, \dots, 6\}$  выполняется

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	2	4	0	5	6	1



$$f(x) = (g(x) + h(x)) \pmod{7}.$$

б) перестановка  $f$  задана на чётном количестве чисел  $\{0, 1, \dots, 2n - 1\}$  таблицей:

Здесь  $(i_0, i_1, \dots, i_{2n-1})$  – перестановка чисел  $\{0, 1, \dots, 2n - 1\}$ .

$x$	0	1	2	..	$2n - 2$	$2n - 1$
$f(x)$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	..	$i_{2n-2}$	$i_{2n-1}$

Докажите, что не существует перестановок  $g$  и  $h$  таких, что для всех  $x \in \{0, 1, \dots, 2n - 1\}$  выполняется  $f(x) = (g(x) + h(x)) \pmod{(2n)}$ ?

4. В криптосистеме RSA (знания алгоритма шифрования не требуется для решения задачи) элементы надёжности определяются несколькими параметрами. В частности, выбором числа  $N = p \cdot q$ , где  $p, q$  – различные нечётные простые числа, и значением  $\varphi(N) = (p - 1) \cdot (q - 1)$ . Известна следующая теорема (малая теорема Ферма): если  $p$  – простое число,  $a$  – целое число, не делящееся на  $p$ , то  $a^{p-1} = 1 \pmod{p}$ . Используя это:

а) докажите, что  $x^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = x \pmod{N}$  для всех  $x \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$ .

б) найдите  $p$  и  $q$ , если известно, что  $N = 42494861$  и  $x^{2^{124}0913} = x \pmod{N}$  для всех  $x \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$ .

5. Четыре компьютера, расположенные в вершинах квадрата  $ABCD$ , соединены прямолинейными отрезками проводов с сервером, который находится в точке  $O$  пересечения диагоналей. Сторона квадрата равна 2 м. Несложно заметить, что для такого подключения потребуется  $4\sqrt{2}$  метров провода. Чтобы уменьшить длину проводов, вам разрешается передвинуть сервер из точки  $O$  в любую другую точку  $O_1$ , а также компьютер из точки  $A$  в любую другую точку  $A_1$  так, чтобы новая суммарная длина проводов  $S = O_1A_1 + O_1B + O_1C + O_1D$  была как можно меньше. Разрешается компьютеры и сервер размещать в одной точке (например, точка  $A_1$  может совпасть с точкой  $B$ ). Компьютеры в вершинах  $B, C, D$  двигать нельзя. Чему равно минимальное значение  $S$ .
6. Вася хочет заполнить квадратную таблицу (криптографическую мозаику) размера  $4 \times 4$  целыми числами от 1 до 16 по следующему правилу. Сначала он выбирает четыре целых числа  $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \{0, 1, \dots, 16\}$ . Затем первую строку Вася заполняет числами  $a_i^{(1)} = (b_i + 1) \pmod{17}, i = 1, 2, 3, 4$ , вторую строку – числами  $a_i^{(2)} = (b_i + 4) \pmod{17}, i = 1, 2, 3, 4$ , третью  $a_i^{(3)} = (b_i + 13) \pmod{17}, i = 1, 2, 3, 4$  и, аналогично, четвертую  $a_i^{(4)} = (b_i + 16) \pmod{17}, i = 1, 2, 3, 4$ . При этом числа  $b_1, b_2, b_3, b_4$  Вася выбрать должен так, чтобы все числа в таблице оказались различными. Сумеет ли Вася это сделать? Если да, то чему равны  $b_1, b_2, b_3, b_4$ ?

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### Задача 1

Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда игрок, делающий первый ход, заполняет максимально возможное число ячеек, равное  $k - 1$ . Расположим эти  $k - 1$  число в порядке не убывания:  $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_{k-1}}$ .

Здесь в индексах указаны номера позиций, на которых стоят эти числа в таблице. образуем два множества позиций, которые заполнены:  $\{i_1, i_3, \dots\}$  и  $\{i_2, i_4, \dots\}$ , беря указанные числа через одно. Тогда суммы чисел на этих позициях могут отличаться друг от друга не более, чем на 2023. Поэтому оставшуюся незаполненной позицию можно заполнить числом от 0 до 2023 так, чтобы получилась «счастливая» комбинация.

**ОТВЕТ:** Если первым ходит Юра, то Катя всегда может выиграть.

XXXII Межрегиональная олимпиада школьников им. И.Я. Верченко по математике и криптографии  
Задача 2

Сначала по рисунку выпишем очевидные соотношения:

$$X_1 + X_2 = 10 \quad (1)$$

$$Y_1 + Y_2 = X_1 + 3 \quad (2)$$

$$8 + Y_4 = X_2 + 5 \quad (3)$$

$$Y_5 + Y_6 = 12 \quad (4)$$

Необходимо найти:  $\Sigma_1 = Y_1 + 8 + Y_5$ ,  $\Sigma_2 = Y_4$ ,  $\Sigma_3 = Y_2 + Y_6$ .

Далее, заметим, что транзакции №1 и №8 осуществлены одним и тем же владельцем – владельцем 1. То есть использовался один и тот же секретный ключ  $S_1$ , при этом использовалось одно и то же значение  $k$  в подписи, поэтому:

$$9 = (18X_1 + S_1k)(\text{mod } 28),$$

$$1 = (18Y_2 + S_1k)(\text{mod } 28). \quad \text{Отсюда получим } 8 = 36 = (18(X_1 - Y_2))(\text{mod } 28).$$

Следовательно,  $X_1 - Y_2 = 2$ . С учетом (2) имеем:  $Y_1 = X_1 - Y_2 + 3 = 5$ .

Аналогичное свойство замечаем у транзакций №5 и №12:

$$18 = (27 \cdot 3 + S_3k)(\text{mod } 28),$$

$$20 = (27Y_6 + S_3k)(\text{mod } 28). \quad \text{Отсюда получим } -2 = 54 = (27(3 - Y_6))(\text{mod } 28).$$

Следовательно,  $3 - Y_6 = 2$ ,  $Y_6 = 1$ .

С учетом (4) имеем:  $Y_5 = 11$  и уже находится  $\Sigma_1 = 5 + 8 + 11 = 24$ .

Теперь обратим внимание на транзакции №9 и №10, осуществленные владельцем 2, для которых, как нетрудно заметить, использовались одинаковые  $k$ , но с разными знаками, т.к.  $(2 \cdot 15) = 1(\text{mod } 29)$ .

Поэтому:

$$11 = (2 \cdot 8 + S_2k)(\text{mod } 28),$$

$$20 = (15Y_4 - S_2k)(\text{mod } 28).$$

Отсюда получим:  $15Y_4 = 31 - 16 = 15(\text{mod } 28)$ ,  $Y_4 = 1 = \Sigma_2$ .

Т.к. исходная сумма криптокойнов была равна 30, то  $\Sigma_3 = 30 - \Sigma_1 - \Sigma_2 = 5$

**ОТВЕТ:** (24,1,5).

### Задача 3

а) Так как  $\text{НОД}(2,7)=\text{НОД}(6,7)=1$ , то  $g(x) = 2f(x)(\text{mod } 7)$  и  $h(x) = 6f(x)(\text{mod } 7)$  являются перестановками. Но тогда, например,  $g(x) = 2f(x)$ ,  $h(x) = 6f(x)$  и выполняется  $g(x) + h(x) = 2f(x) + 6f(x) = f(x)(\text{mod } 7)$ .

$$\text{б) } \sum_{i=0}^{2n-1} f(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} x = (2n+1)n = n(\text{mod } (2n)).$$

С другой стороны, если указанное условие пункта б) представление существует, то

$$\sum_{i=0}^{2n-1} f(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} g(x) + \sum_{i=0}^{2n-1} h(x) = 2(2n+1)n = 0(\text{mod } (2n)).$$

Что доказывает невозможность указанного представления.

### Задача 4

а) из условия задачи и равенства  $a^{p-1} = 1(\text{mod } p)$  следует  $a^{k(p-1)+1} = a(\text{mod } p)$  для любого натурального  $k$ . Тогда при  $k = \frac{q-1}{2}$  получим  $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(\text{mod } p)$ .

Аналогично  $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(\text{mod } q)$ . Так как  $p, q$  – простые числа, то из этих полученных выше равенств следует  $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(\text{mod } N)$ . Пункт а) доказан.

д) предположим, что  $\frac{\varphi(N)}{2} + 1 = 21240913$ . Тогда получим систему уравнений  $p \cdot q = 42494861$ ,  $(p-1) \cdot (q-1) = 21240913$ .

Решая полученную систему, находим  $p = 6547, q = 7057$

**ОТВЕТ:**  $p = 6547, q = 7057$ .

**XXXII Межрегиональная олимпиада школьников им. И.Я. Верченко по математике и криптографии**  
**Задача 5**

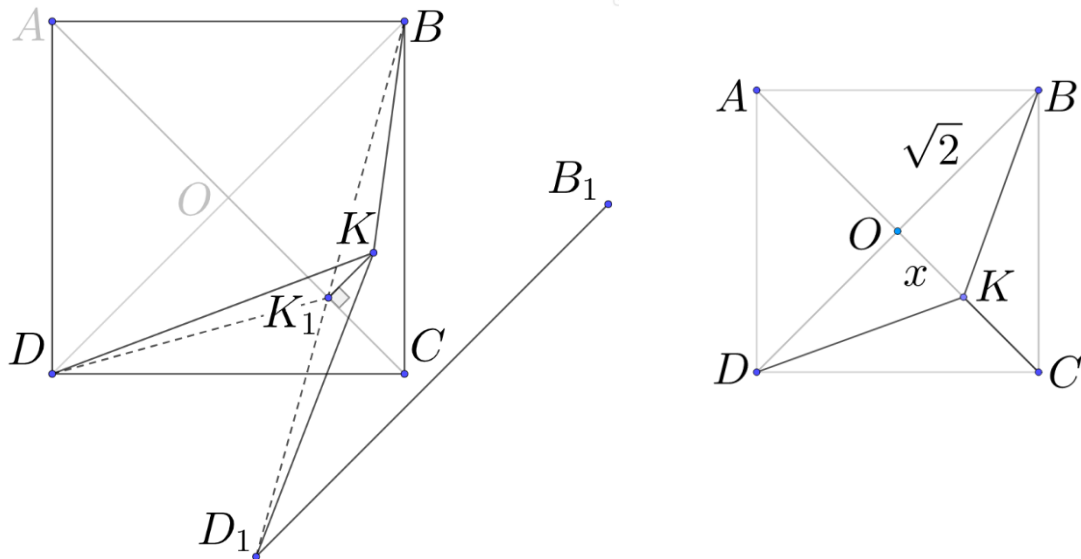
Заметим, что точки  $A_1$  и  $O_1$  совпадают. Действительно, пусть минимум достигается на конфигурации, где это не так. Но тогда, сдвинув точку  $A_1$  в точку  $O_1$ , мы длину проводов уменьшим. Таким образом, компьютер  $A_1$  и сервер  $O_1$  должны оказаться в некоторой точке  $K$  ( $K = A_1 = O_1$ ).

Покажем, что  $K$  лежит на диагонали  $AC$ . Предположим обратное. Пусть  $K_1$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $K$  на прямую  $AC$ . Покажем, что сумма расстояний от точки  $K_1$  до вершин  $B, C, D$ , которую обозначим  $S_{K_1} = K_1B + K_1C + K_1D$ , меньше аналогичной суммы  $S_K = KB + KC + KD$ . Длина проекции меньше длины наклонной, поэтому  $K_1C < KC$ . Чтобы доказать, что

$$K_1D + K_1B < KD + KB, \quad (1)$$

отразим отрезок  $BD$  относительно прямой  $KK_1$  (при этом точка  $B$  перейдет в точку  $B_1$ , точка  $D$  – в точку  $D_1$ ). Точки  $B, K_1, D_1$  окажутся на одной прямой. Тогда  $K_1D + K_1B = K_1D_1 + K_1B = D_1B$ , и при этом  $KD + KB = KD_1 + KB > D_1B$ . Неравенство (1) доказано. Следовательно,  $S_{K_1} < S_K$ , а значит искомая точка  $K$  должна лежать на диагонали.

Пусть  $OK = x$ . Тогда  $S(x) = KC + KB + KD = 2\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{2} - x$ . На отрезке  $[0, \sqrt{2}]$



функция  $S(x)$  имеет (единственный) минимум в точке  $x_0 = \sqrt{2/3}$  ( $x_0$  – корень уравнения  $S'(x) = 2x/\sqrt{x^2 + 2} - 1 = 0$ ), и  $S(x_0) = 2\sqrt{2/3 + 2} + \sqrt{2} - \sqrt{2/3} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ .

**ОТВЕТ:**  $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ .

**Задача 6**

Задачу можно решить древовидным перебором всех вариантов. Существование подобных мозаик для других простых чисел является открытой проблемой. Гипотеза утверждает, что такие мозаики существуют только для простых чисел Ферма: 3, 5, 17, 257.

**ОТВЕТ:** 2, 8, 9, 15.

9 КЛАСС

1. Найдите шестизначное число  $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_6}$ ,  $a_i \in \{1, 2, \dots, 9\}$  такие, что  $8A + a_6 = B$ , где  $B = \overline{b_1 b_2 \dots b_6}$ ,  $b_i = 10 - a_i$ . В ответе запишите это число, например, 987654.
2. На координатной плоскости в точках  $A(0, 6)$ ,  $B(6, 0)$ ,  $C(6, 10)$ ,  $D(9, 9)$  и  $E(6, 6)$  расположены вышки сотовой связи. Будем говорить, что абонент находится в зоне действия данной вышки, если расстояния до неё меньше, чем до любой другой вышки. Найдите площадь зоны действия вышки E. В ответе запишите число без единиц измерения, при необходимости дробное число запишите через точку, например, 12 или 13.5.
3. Пароли в системе состояются из букв английского алфавита (26 букв) и цифр. При этом требуется, чтобы в пароле содержались цифра и заглавная буква. Пользователь допускается в систему, если предъявленный им пароль отличается от установленного не более чем в одном символе. Сколько паролей, соответствующих требованиям составления, позволят войти в систему, если для пользователя был установлен пароль **1wR8dttf** (не совпадающих с установленным паролем)?
4. На уроке Истории математики Лена узнала необычный факт и придумала как с помощью него можно шифровать сообщение. Российский шахматный мастер и теоретик Карл Яниш нашёл замкнутый маршрут обхода всех клеток шахматной доски ходом коня ровно по одному разу. Прочтите текст, вписанный Леной в клетки шахматной доски по такому маршруту, если начало текста в g3.

8	о	о	л	а	з	а	т	з
7	а	я	с	м	с	я	г	к
6	т	в	э	р	м	о	н	а
5	с	н	ч	п	с	н	о	у
4	е	н	т	т	е	ы	н	о
3	е	н	у	т	р	т	м	м
2	ч	ш	о	м	л	т	в	н
1	з	а	а	ч	н	н	н	а
	а	б	с	д	е	ф	г	h

В ответе запишите полученный текст слитно (без пробелов и знаков препинания), с маленькой буквы. Например, это пример полученного текста

5. Юный криптограф изучает свойства паролей в учебном варианте парольного словаря. В нем 60 паролей содержат букву "Ф", 40 - букву "С", 100 - букву "Б". Буквы "Б" и "С" вместе содержатся в 20 паролях. Буквы "Б" и "Ф" вместе содержатся в 30 паролях. Ни один пароль не содержит вместе букв "Ф" и "С". Сколько паролей содержат хотя бы одну из этих трех букв?
6. Для входа в университет Криптоландии у каждого студента есть карточка, на которой записана уникальная (у каждого студента своя) последовательность  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$  из целых чисел от 0 до 6. При входе в университет студент прикладывает карточку к устройству, которое подсчитывает величины  $A$  и  $B$  по формулам:  $A = ((x_1 * x_2) * x_3) * x_4$ ,  $B = (x_5 \circ x_6) \circ x_7$ . Операции  $*$  и  $\circ$  задаются таблицами (представляющими собой латинские

XXXII Межрегиональная олимпиада школьников им. И.Я. Верченко по математике и криптографии квадраты: у них в каждой строке и каждом столбце числа не повторяются). Например,  $3 * 5 = 4$ ,  $2 \circ 4 = 3$ . Студенту разрешат войти, если  $A = B$ . Сколько самое большое может быть студентов в таком университете? Ответ напишите в виде целого числа. Например, 12345678.

*	0	1	2	3	4	5	6
0	5	6	1	2	4	0	3
1	1	3	6	0	2	5	4
2	4	5	3	1	0	2	6
3	6	0	5	3	1	4	2
4	0	4	2	6	5	3	1
5	2	1	0	4	3	6	5
6	3	2	4	5	6	1	0

o	0	1	2	3	4	5	6
0	4	5	6	3	0	1	2
1	2	0	3	4	5	6	1
2	1	2	4	5	3	0	6
3	6	1	0	2	4	5	3
4	5	3	2	1	6	4	0
5	3	6	5	0	1	2	4
6	0	4	1	6	2	3	5

### 10 КЛАСС

- Найдите шестизначное число  $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_6}$ ,  $a_i \in \{1, 2, \dots, 9\}$  такие, что  $8A + a_6 = B$ , где  $B = \overline{b_1 b_2 \dots b_6}$ ,  $b_i = 10 - a_i$ . В ответе запишите это число, например, 987654.
- На координатной плоскости в точках  $A(0, 6)$ ,  $B(6, 0)$ ,  $C(6, 10)$ ,  $D(9, 9)$  и  $E(6, 6)$  расположены вышки сотовой связи. Будем говорить, что абонент находится в зоне действия данной вышки, если расстояние до неё меньше, чем до любой другой вышки. Найдите площадь зоны действия вышки E. В ответе запишите число без единиц измерения, при необходимости дробное число запишите через точку, например, 12 или 13.5.
- Пароли в системе состояются из букв английского алфавита (26 букв) и цифр. При этом требуется, чтобы в пароле содержались цифра и заглавная буква. Пользователь допускается в систему, если предъявленный им пароль отличается от установленного не более чем в одном символе. Сколько паролей, соответствующих требованиям составления, позволят войти в систему, если для пользователя был установлен пароль **1wR8dttf** (не совпадающих с установленным паролем)?
- На уроке Истории математики Лена узнала необычный факт и придумала как с помощью него можно шифровать сообщение. Российский шахматный мастер и теоретик Карл Яниш нашёл замкнутый маршрут обхода всех клеток шахматной доски ходом коня ровно по одному разу. Прочтите текст, вписанный Леной в клетки шахматной доски по такому маршруту, если начало текста в g3.

8	о	о	л	а	з	а	т	з
7	а	я	с	м	с	я	г	к
6	т	в	э	р	м	о	н	а
5	с	н	ч	п	с	н	о	у
4	е	н	т	т	е	ы	н	о
3	е	н	у	т	р	т	м	м
2	ч	ш	о	м	л	т	в	н
1	з	а	а	ч	н	н	н	а
	а	б	с	д	е	ф	г	h

В ответе запишите полученный текст слитно (без пробелов и знаков препинания), с маленькой буквы. Например, этопримерполученноготекста

11. Юный криптограф изучает свойства паролей в учебном варианте парольного словаря. В нем 60 паролей содержат букву "Ф", 40 - букву "С", 100 - букву "Б". Буквы "Б" и "С" вместе содержатся в 20 паролях. Буквы "Б" и "Ф" вместе содержатся в 30 паролях. Ни один пароль не содержит вместе букв "Ф" и "С". Сколько паролей содержат хотя бы одну из этих трех букв?

12. Для входа в университет Криптоландии у каждого студента есть карточка, на которой записана уникальная (у каждого студента своя) последовательность  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$  из целых чисел от 0 до 6. При входе в университет студент прикладывает карточку к устройству, которое подсчитывает величины  $A$  и  $B$  по формулам:  $A = ((x_1 * x_2) * x_3) * x_4$ ,  $B = (x_5 \circ x_6) \circ x_7$ . Операции  $*$  и  $\circ$  задаются таблицами (представляющими собой латинские квадраты: у них в каждой строке и каждом столбце числа не повторяются). Например,  $3 * 5 = 4$ ,  $2 \circ 4 = 3$ . Студенту разрешат войти, если  $A = B$ . Сколько самое большое может быть студентов в таком университете? Ответ напишите в виде целого числа. Например, 12345678.

*	0	1	2	3	4	5	6
0	5	6	1	2	4	0	3
1	1	3	6	0	2	5	4
2	4	5	3	1	0	2	6
3	6	0	5	3	1	4	2
4	0	4	2	6	5	3	1
5	2	1	0	4	3	6	5
6	3	2	4	5	6	1	0

o	0	1	2	3	4	5	6
0	4	5	6	3	0	1	2
1	2	0	3	4	5	6	1
2	1	2	4	5	3	0	6
3	6	1	0	2	4	5	3
4	5	3	2	1	6	4	0
5	3	6	5	0	1	2	4
6	0	4	1	6	2	3	5

### 11 КЛАСС

1. Найдите восьмизначное число  $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_8}$ ,  $a_i \in \{1, 2, \dots, 9\}$  такие, что  $8A + a_8 = B$ , где  $B = \overline{b_1 b_2 \dots b_8}$ ,  $b_i = 10 - a_i$ . В ответе запишите это число, например, 98765432.

2. На координатной плоскости в точках  $A(2,4)$ ,  $B(8,8)$ ,  $C(8,0)$ ,  $D(14,1)$  и  $E(8,1)$  расположены вышки сотовой связи. Будем говорить, что абонент находится в зоне действия данной вышки, если расстояния до неё меньше, чем до любой другой вышки. Найдите площадь зоны действия

XXXII Межрегиональная олимпиада школьников им. И.Я. Верченко по математике и криптографии  
вышки Е. В ответе запишите число без единиц измерения, при необходимости дробное число  
запишите через точку, например, 12 или 13.5.

3. Пароли в системе состояются из букв английского алфавита (26 букв) и цифр. При этом  
требуется, чтобы в пароле содержались цифра и заглавная буква. Пользователь допускается в  
систему, если предъявленный им пароль отличается от установленного не более чем в одном  
символе. Сколько паролей, соответствующих требованиям составления, позволят войти в  
систему, если для пользователя был установлен пароль Tw38dttf (не совпадающих с  
установленным паролем)?

4. На уроке Истории математики Лена узнала необычный факт и придумала как с помощью  
него можно шифровать сообщение. Российский шахматный мастер и теоретик Карл Яниш  
нашёл замкнутый маршрут обхода всех клеток шахматной доски ходом коня ровно по одному  
разу. Прочтите текст, вписанный Леной в клетки шахматной доски по такому маршруту, если  
начало текста в g3.

8	р	л	с	о	и	р	о	я
7	р	я	ы	а	к	и	п	о
6	л	к	т	т	в	м	п	й
5	а	о	а	л	н	с	д	о
4	а	и	т	л	к	и	я	т
3	с	н	с	б	ь	е	к	г
2	м	н	и	л	л	о	е	х
1	ч	и	ы	я	п	б	а	д
	а	б	с	д	е	ф	г	h

В ответе запишите полученный текст слитно (без пробелов и знаков препинания), с маленькой  
буквы. Например, это пример полученного текста

5. Юный криптограф изучает свойства паролей в учебном варианте парольного словаря. В  
нем 100 паролей содержат букву "А", 120 - букву "Ф", 140 - букву "С" и 160 букву "Б". Буквы  
"А" и "Ф" вместе содержатся в 50 паролях, буквы "А" и "С" вместе содержатся в 70 паролях,  
буквы "А" и "Б" вместе содержатся в 60 паролях, буквы "Ф" и "С" вместе содержатся в 70  
паролях, буквы "Ф" и "Б" вместе содержатся в 80 паролях, а буквы "С" и "Б" вместе содержатся  
в 50 паролях. Буквы "А", "Ф" и "С" вместе содержатся в 30 паролях, буквы "А", "Ф" и "Б"  
вместе содержатся в 40 паролях, буквы "А", "С" и "Б" вместе содержатся в 40 паролях, а буквы  
"Ф", "С" и "Б" вместе содержатся в 30 паролях. Буквы "А", "Ф", "С" и "Б" вместе содержатся в  
20 паролях. Сколько паролей содержат хотя бы одну из этих четырех букв?

6. Для входа в университет Криптоландии у каждого студента есть карточка, на которой  
записана уникальная (у каждого студента своя) последовательность  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$  из  
целых чисел от 0 до 6. При входе в университет студент прикладывает карточку к устройству,  
которое подсчитывает величины  $A$  и  $B$  по формулам:  $A = ((x_1 * x_2) * x_3) * x_4$ ,  
 $B = (x_5 \circ x_6) \circ x_7$ . Операции  $*$  и  $\circ$  задаются таблицами (представляющими собой латинские  
квадраты: у них в каждой строке и каждом столбце числа не повторяются). Например,  
 $3 * 5 = 4, 2 \circ 4 = 3$ . Студенту разрешат войти, если  $A = B$ . Сколько самое большое может быть  
студентов в таком университете? Ответ напишите в виде целого числа. Например, 12345678.

*	0	1	2	3	4	5	6
0	5	6	1	2	4	0	3
1	1	3	6	0	2	5	4
2	4	5	3	1	0	2	6
3	6	0	5	3	1	4	2
4	0	4	2	6	5	3	1
5	2	1	0	4	3	6	5
6	3	2	4	5	6	1	0

o	0	1	2	3	4	5	6
0	4	5	6	3	0	1	2
1	2	0	3	4	5	6	1
2	1	2	4	5	3	0	6
3	6	1	0	2	4	5	3
4	5	3	2	1	6	4	0
5	3	6	5	0	1	2	4
6	0	4	1	6	2	3	5

## ОТВЕТЫ

### 9 КЛАСС

- 1) 123456.
- 2) 32.5.
- 3) 452.
- 4) материал становится знакомым и лучше воспринимается, это значит, что мозгу.
- 5) 150.
- 6)  $7^6$ .

### 10 КЛАСС

- 1) 123456.
- 2) 32.5.
- 3) 452.
- 4) материал становится знакомым и лучше воспринимается, это значит, что мозгу.
- 5) 150.
- 6)  $7^6$ .

### 11 КЛАСС

- 1) 12345678.
- 2) 24.
- 3) 452.
- 4) кандидатской степени продвижения на крыльях блистая отличными баллами.
- 5) 260.
- 6)  $7^6$ .